**Лекція 41**

**Похідна. Неперервність. Похідні елементарних функцій, суми, добутку, частки.**

**План**

|  |
| --- |
| 1.Означення похідної  2. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції  3.Похідні елементарних функцій, суми, добутку, частки |
| ***1.Означення похідної***  Нехай функція  визначена на деякому проміжку (*а*; *b*). Візьмемо значення  і надамо аргументу приросту . Тоді функція набуде приросту . Розглянемо відношення приросту функції  до приросту аргументу  і перейдемо до границі при :  . (4.1)  Якщо границя (4.1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції*  *за змінною х* і позначається  .  *Означення.* *Похідною* *функції*  *за аргументом х* називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.  Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.  Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.  **Приклад**. Функція *у* = *х*2. Знайти похідну в точках *х* = 3 і *х* = – 4.  ⚫ Надамо аргументу *х* приросту , тоді функція набуде приросту  Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу , відшукаємо границю . Таким чином, .  Похідна в точці *х* = 3 , а похідна при *х* = – 4 буде .  **Приклад.** , де .  ⚫ Надавши аргументу  приросту , дістанемо приріст функ­ції . Тепер знайдемо границю відношення  при :  , тобто  **Приклад**. .  ⚫ Користуючись відомою з тригонометрії формулою  ,  знайдемо приріст функції у точці  і обчислимо границю:  ,  ;  .  Аналогічно можна дістати: .  **Приклад**. .  ⚫ Для цієї функції маємо  ,  тобто .  **2.Залежність між неперервністю і диференційовністю функції**  Функція *у* = *f* (*x*) є *неперервною в точці х*, якщо у цій точці .  *Означення.* Функція *у* = *f* (*x*) називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя:  .  *Означення.*Функція *у* = *f* (*x*) називається *диференційовною на інтервалі* (*а*; *b*), якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.  Зв’язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.  ***Теорема.* Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.**  Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.  Справді, нехай функція  диференційовна в точці . Запишемо тотожність , звідси  Таким чином, функція  неперервна в точці .    Рис. 4.5  *Наслідок.* Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.  Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція  (рис. 4.5). Ця функція неперервна при *х* = 0, але не ди- ференційовна для цього значення, оскільки в точці з абсцисою *х* = 0 не існує дотичної до графіка функції.  Таким чином, необхідною умовою диференційовності функції *у* = *f* (*х*) у точці *х* є її неперервність у цій точці.  **3.Похідні елементарних функцій, суми, добутку, частки**  ***Основні правила диференціювання***  *Теорема 1.* Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо *у* = *с*, де *с* = const, то .  *Теорема 2.* Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: .  Доведення    *Теорема 3.* Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:  .  Доведення    *Теорема 4.* Сталий множник можна виносити за знак похідної:  , де .  Доведення    *Теорема 5.* Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу .                *Зауваження.* Похідну від функції , де , зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини  на функцію *u* (*x*):  .  **Приклад.** Обчислити похідну для функції *у* = tg *x*.    Таким чином, .  ***Похідні від основних елементарних функцій***  За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:  1. ; 2. ;  3. ; 4. ;  5. ; 6. ;  7. ; 8. ;  9. ; 10. ;  11. ; 12. ;  13. ; 14. .  Продиференціювати подані далі функції.  **Приклад.** .  ⚫ Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:  .  У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію ⇒ — застосуємо до нього теорему 4 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником  — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою *е* ⇒ — використаємо формулу (5):  .  **Запитання для самоконтролю** |

1.Означення похідної

2. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції

3.Похідні елементарних функцій, суми, добутку, частки

1) (С)`=

2) [af(х)]`=

3) (хn)`=

4) (√х)` =

5) (ех)`=

6) (ах)`=

7) (lnх)`=

8) (logах)`=

9) (sinx)`=

10) (cosx)`= -

11) (tgx)`=

12) (ctgx)`=

13) (arcsinx)`=

14) (arccosx)`=

15) (arctgx)`=

16) (arcсtgx)`=

**Лекція 42**

**Похідна складної функції**

**План**

1.Поняття похідної складної функції

2.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять логарифмічна функції

3.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять степенева функції

4.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять показникові функції

5.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять тригонометричні функції

|  |
| --- |
|  |
| **1.Поняття похідної складної функції**  Складною функцією називається функція, складена з декількох функцій.  Позначається складна функція  Нехай *у* = *f* (*u*), де , тобто . Функція *f* (*u*) називається *зовнішньою*, а функція  — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.  Доведемо тепер теорему про похідної складної функції:  *Теорема.* Якщо *у* = *f* (*u*) та  — диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює .  Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною  Доказ:  Нехай дана дифференцируемая функція, яка є складною і має проміжний аргумент залежить від.За визначенням похідної можемо записати. Помноживши чисельник і знаменник функції, що міститься під знаком межі, на збільшення проміжного аргументу,  отримаємо:    тобто *похідна складної функції по аргументу дорівнює похідної цієї функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну внутрішньої функції за основним аргументу.*  Це правило інколи називають правилом ланцюжка: тобто похідна складної функції дорівнює добутку похідних від усіх складових її функцій. При цьому слід пам'ятати, що кожну функцію потрібно диференціювати за її власним аргументу.  Приклад: Знайти похідну функції: . Рішення: Ця функція складна, то . Згідно з правилом диференціювання складної функції отримаємо:.    Розглянемо зараз формули складних функція, в комбінацію яких входять логарифмічна, показникові, степенева, тригонометричні функції  2**.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять логарифмічні функції**  Виведемо формулу диференціювання складної функції, де. Для цього використовуємо формулу диференціювання складної функції, одержимо:    тобто   . (1 ')   Приклад: Знайти похідні функцій:   Рішення:   Перший спосіб:  ; Другий спосіб: Спочатку перетворимо функцію за допомогою властивостей логарифмів:  . А тепер знайдемо похідну:  ;      Тепер знайдемо похідну складної функції.  Скористаємося правилом диференціювання складної функції, одержимо:   , Тобто .   (2 ')   Приклад: Знайти похідні :  Рішення:              **3.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять степенева функції**  Скориставшись правилом диференціювання складної функції, знайдемо похідну складної функції де , отримаємо , тобто  . (3 ')  Приклади: Знайти похідні :       .Для складної функції отримаємо формулу за допомогою правила  .  4.**Похідні складних функція, в комбінацію яких входять показникові функції**  В результаті застосування правила диференціювання складної функції отримаємо формули для знаходження похідних складних функцій і , де  , (4 ')    (5 ') Приклади: Знайти похідні:   Рішення:              5**.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять тригонометричні функції**  За допомогою правила диференціювання складної функції отримаємо формулу для знаходження похідної складної функції, де:  . (6 ') Приклади: Знайти похідні:   Рішення:         Щоб знайти похідну складної функції застосуємо правило диференціювання складної функції і отримаємо: . (7 ') Приклади: Знайти похідні :   Рішення:        Для знаходження похідної складної функції, застосуємо правило диференціювання складної функції і отримаємо, що: .  (8 ') Для функції маємо: .  (9 ') Приклади: Знайти похідні наступного:   Рішення: |

**Запитання для самоперевірки**

1.Поняття похідної складної функції

2.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять логарифмічна функції

3.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять степенева функції

4.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять показникові функції

5.Похідні складних функція, в комбінацію яких входять тригонометричні функції

**Лекція 43**

**Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі. Фізичний зміст похідної**

|  |
| --- |
| **План лекції**  1.Геометричний зміст похідної  2.Рівняння дотичної і нормалі  3.Фізичний зміст похідної |
| **1.Геометричний зміст похідної**  *Означення.* *Дотичною до кривої L у точці М* називається граничне положення *МN* січної *ММ*1 при прямуванні точки *М*1 по кривій *L* до точки *М* (рис. 4.1).  Нехай крива, задана рівнянням , має дотичну в точці *М* (*х*, *у*). Позначимо (рис. 4.2) кутовий коефіцієнт дотичної *МN*: . Надамо в точці *х* приросту , тоді ордината *у* набуде приросту .  З  випливає, що . Коли , то   і січна прямує до положення дотичної *МN*.  Таким чином, .    Рис. 4.1 Рис. 4.2  Оскільки , то  тобто похідна  чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою *х*. У цьому полягає геометричний зміст похідної.  *Наприклад:*  Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіку функції  в точці  Розв’язок. ,  Знайти тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції  а)  в точці  Розв’язок. ,  **2.Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої**  Нехай функція *у* = *f* (*t*) означена і неперервна на деякому проміжку [*a*; *b*]. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції *у* = *f* (*x*) у точці з абсцисою .  Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою *х*0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку *М*0 (*х*0; *у*0) у даному напрямі (рис. 4.4):  , (4.2)  де *k* кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо .    Рис. 4.4  Рівняння дотичної. Оскільки , то з виразу (4.2) ді- станемо рівняння дотичної у вигляді  . (4.3)  Рівняння нормалі. *Означення.* *Нормаллю* до графіка функції в точці *М*0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис. 4.4).  Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі  і записуємо її рівняння у вигляді  . (4.4)  Приклад.1 Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції *у* = *х*2 у точці з абсцисою *х*0 = – 3.  ⚫ Знайдемо похідну від заданої функції , звідси .  Рівняння дотичної (4.3) і нормалі (4.4) запишуться так:  або у загальному вигляді: 6*х* + *у* + 9 = 0, *х* – 6*у* + 57 = 0.  Приклад.2 Знайдіть рівняння дотичної до графіку функції в точці  ,  Розв’язок.              .  **3.Механічний зміст похідної**    Нехай матеріальна точка рухається по прямій лінії. На цій прямій виберемо певний напрям, початок відліку (точку) і одиницю масштабу (мал. 1).            мал. 1  Кожному моменту часу t відповідає шлях S, пройдений точкою M від точки відліку O за час, то є шлях є функція від часу  .Ця формула називається законом руху точки. З усіх рухів матеріальної точки найпростішим є рівномірний рух по прямій (з курсу фізики відомо, що прямолінійний рух точки називається рівномірним, якщо точка за будь-які рівні за тривалістю проміжки часу проходить однакові шляхи). *Швидкістю* прямолінійного рівномірного руху називається шлях, пройдений точкою в одиницю часу. Зі сказаного видно, що при рівномірному русі швидкість руху постійна. На практиці автомобілі, поїзди, літаки рівномірно рухаються лише на деяких ділянках шляху, а в загальному випадку їх рух нерівномірний. При нерівномірному русі точка за різні, але рівні за тривалістю, проміжки часу може проходити різні шляхи. Отже, нерівномірне рух не можна повністю охарактеризувати вказівкою шляху, пройденого точкою за той чи інший проміжок часу. Тому для характеристики нерівномірного руху точки використовується поняття *середньої швидкості.* Нехай матеріальна точка рухається за законом  (див. мал. 1). Якщо  і , то середньою швидкістю руху за проміжок часу від моменту t0 до моменту t1 називається число  Розглянемо вільне падіння тіл, яке відбувається за законом, де - прискорення вільного падаючого тіла (м/с2), t- час (у секундах), s- шлях (в метрах). Обчислимо шлях, пройдений тілом за першу секунду, тобто за проміжок часу від моменту t0=0cдо моменту t1=1c    Отже, середня швидкість руху тіла за першу секунду дорівнює  (м / с). Обчислимо тепер шлях, пройдений тілом за десяту секунду, тобто за проміжок часу від моменту t0 =9c до моменту t1 =10c  м. Отже, середня швидкість руху тіла за десяту секунду дорівнює м / с. Таким чином, вільне падіння тіл є рух нерівномірний, так як за різні, але рівні за тривалістю, проміжки часу тіло проходить різні шляхи. Зауважимо, що і середні швидкості у вільно падаючого тіла за різні, але рівні за тривалістю проміжки часу (наприклад, від моменту t0=0cдо моменту t1=1c і від t0 =9c до моменту t1 =10c) різні. Знайдемо тепер середню швидкість вільно падаючого тіла за проміжок часу від початку падіння, тобто від моменту t0=0c моменту t1 =10c   м / с. Порівнюючи середні швидкості бачимо, що середня швидкість для всього проміжку часу від с до с відмінна від середніх швидкостей для першої і останньої секунди з зазначеного проміжку часу. Отримали, що якщо точка рухається нерівномірно, то, знаючи середню швидкість для деякого проміжку часу, неможливо встановити швидкість у будь-який момент часу з цього проміжку. А це означає, що середня швидкість не може повністю характеризувати нерівномірний рух, тому для його характеристики вводять поняття *миттєвої швидкості*. Нехай точка рухається за законом. Тоді за проміжок часу тривалості  точка проходить шлях, рівний, з середньою швидкістю   Очевидно, що середня швидкість тим повніше характеризує рух за проміжки часу від t0 до t, чим менше тривалість цього проміжку.  *Межа середньої швидкості за проміжок часу від t0 до t при t, яка прагне до t0, називається миттєвою швидкістю в момент часу*, тобто  .  Аналогічно доводять    У цьому полягає механічний зміст похідної  *Приклад:* Знайдемо миттєву швидкість в момент часу t*0* вільного падіння тіла. Рішення: Так як вільне падіння тіла відбувається за законом, то миттєва швидкість дорівнює:   Тобто при вільному падінні тіло рухається зі швидкістю  Приклад 1 Матеріальна точка рухається за законом . Знайти швидкість у момент часу с. ( вимірюється в метрах)  Розв’язок.  (м/с)  Приклад 2 Обертання тіла навколо вісі здійснюється за законом . Знайти кутову швидкість, коли ( вимірюється в радіанах, -в секундах)  Розв’язок.  (рад/с)  **Запитання для самоконтролю.** |

1.Геометричний зміст похідної

2.Рівняння дотичної і нормалі

3.Фізичний зміст похідної

**Лекція 44**

**Зростання та спадання функції. Точки екстремуму.**

**План**

|  |
| --- |
|  |
| 1. Зростання та спадання функції 2. Точки екстремуму. Необхідня та достатня умови екстремума 3. План знаходження інтервалів монотонності та точок екстремуму 4. Розв’язування вправ |
| **1.Зростання та спадання функцій.**  Нагадаємо, що  Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.   1. *Функція* f(х) *називається* зростаючою па множині Р, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.*   Тобто для будь-яких двох значень ***x1*** і х2 з множини Р, якщо х2 > ***x1***., то *f(x2)>f(x1).*   1. *Функція* f(х) *називається* **спадною на множині *Р****, якщо більшому значенню* *аргументу з цієї множини відповідає* *менше значення функції.*   Тобто для будь-яких двох значень х1 і х2 з множини Р, якщо *х*2 > х1, то *f*(х2)<*f*(х1).  мал. 1  На мал. 1 знайти проміжки зростання та спаду  ***Теорема1.*** *1) Якщо функція f(x) має похідну на відрізку [a, b] і зростає на цьому відрізку, то її похідна на цьому відрізку невід’ємна, тобто f′(x) ≥ 0.*  *2) Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a, b] і діференційовна на проміжку (а, b), причому f′(x) > 0 для a < x < b, то ця функція зростає на відрізку [a, b].*  **Доказ.**  1) Якщо функція f(x) зростає, то f(x + Δx) > f(x) при Δx>0 та f(x + Δx) < f(x) при Δх<0,  тоді:    2) Нехай f′(x)>0 для будь-яких точок х1 и х2, які належать відрізку [a, b], причому x1<x2.  Тоді за теоремою Лагранжа: f(x2) – f(x1) = f′(ε)(x2 – x1), x1 < ε < x2  За умовою f′(ε)>0, отже, f(x2) – f(x1) >0, тобто функція f(x) зростає.  Теорема доведена.  ***Теорема2.*** *1) Якщо функція f(x) має похідну на відрізку [a, b] та спадає на цьому відрізку, то її похідна на цьому відрізку не є додатньою, тобто f′(x) 0.*  *2) Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a, b] і діференційовна на проміжку (а, b), причому f′(x) < 0 для a < x < b, то ця функція спадає на відрізку [a, b].*  **Доказ.**  Якщо функція f(x) спадає, то f(x + Δx) < f(x) при Δx>0 и f(x + Δx) < f(x) при Δх>0,  тогда:    2) Нехай f′(x)<0 для будь-яких точок х1 та х2, які належать відрізку [a, b], причому x1<x2.  Тоді за теоремою Лагранжа: f(x2) – f(x1) = f′(ε)(x2 – x1), x1 < ε < x2  За умовою f′(ε)<0, отже, f(x2) – f(x1) <0, тобто функція f (x) спадає.  Теорема доведена.  *Напр:* Знайти проміжки спадання функції у=-х2+4х-3  Розв’язок. у’=-2х+4  у’=0  у=2  у’>0 при х Є(-∞,2)- функція зростає  у’<0 при х Є(2,+∞)- функція спада |
| *Приклади*  1.Знайти проміжки спадання функції  Розв’язок.        на проміжку  функція зростає  на проміжку  функція спадає  2.Знайти проміжки зростання функції  Розв’язок.        на проміжку  функція спадає    на проміжку  функція зростає  **2. Точки екстремуму**.  *Визначення.* Функція f (x) має в точці х1 максимум, якщо її значення в цій точці більше значень у всіх точках деякого інтервалу, що містить точку х1. Функція f (x) має в точці х2 мінімум, якщо f (x2 + )> f (x2) при будь-якому (  може бути і негативним).  Очевидно, що функція, визначена на відрізку може мати максимум і мінімум тільки в точках, що знаходяться всередині цього відрізка. Не можна також плутати максимум і мінімум функції з її найбільшим і найменшим значенням на відрізку - це поняття принципово різні.  *Визначення. Точки максимуму і мінімуму функції називаються точками екстремуму.*  *Теорема. (необхідна умова існування екстремуму) Якщо функція f (x) дифференційовна в точці х = х1 і точка х1 є точкою екстремуму, то похідна функції звертається в нуль в цій точці.*  Доказ. Припустимо, що функція f (x) має в точці х = х1 максимум. Тоді при достатньо малих додатніх Δх>0 виконується нерівність:  , тобто    Тоді        За визначенням:    Тобто якщо Δх→0, але Δх<0, то f′(x1) ≥ 0, а якщо Δх→0, але Δх>0, то f′(x1) ≤ 0.  А можливо це тільки в тому випадку, якщо при Δх→0 f′(x1) = 0.  Для випадку, якщо функція f (x) має в точці х2 мінімум теорема доводиться аналогічно. Теорема доведена.  Приклад: f(x) = ⎮x⎮ Приклад: f(x) =  y y  x  x    В точці х = 0 функція має мінімум, але В точці х = 0 функція не має ні  не має похідну. максимума, ні мінімума, ні похід-  ної.  **Наслідок.** Зворотне твердження невірне. Якщо похідна функції в деякій точці дорівнює нулю, то це ще не означає, що в цій точці функція має екстремум. Красномовний приклад цього - функція у = х3, похідна якої в точці х = 0 дорівнює нулю, проте в цій точці функція має тільки перегин, а не максимум або мінімум.  **Визначення.** Критичними точками функції називаються точки, в яких похідна функції не існує або дорівнює нулю.  Розглянута вище теорема дає нам необхідні умови існування екстремуму, але цього недостатньо  Взагалі кажучи, функція f (x) може мати екстремум в точках, де похідна не існує або дорівнює нулю.  **Теорема.** (Достатні умови існування екстремуму)  Нехай функція f(x) неперервна в інтервалі (a, b), який містить критичну точку х1, та дифференційовна у всіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки х1).  Якщо при переході через точку х1 зліва направо похідна функції f′(x) змінює знак з “+” на “-“, то в точці х = х1 функція f(x) має максимум, а якщо похідна змінює знак з “-“ на “+”- то функція має мінімум.  **Доказ.**  Нехай  За теоремою Лагранжа: f(x) – f(x1) = f′(ε)(x – x1), де x < ε < x1.  Тоді: 1) Якщо х < x1, то ε < x1; f′(ε)>0; f′(ε)(x – x1)<0, отже  f(x) – f(x1)<0 або f(x) < f(x1).  2) Якщо х > x1, то ε > x1 f′(ε)<0; f′(ε)(x – x1)<0, отже  f(x) – f(x1)<0 або f(x) < f(x1).  Т. к. відповіді збігаються, то можна сказати, що f(x) < f(x1) в будь-яких точках у районі х1, тобто х1 – точка максимуму.  Доказ теореми для точки мінімуму проводиться аналогічно. Теорема доведена.  **3.План знаходження інтервалів монотонності та точок екстремума.**  1.Вказати D(у)  2.Обчислити  3.Знаходим критичні точки (=0 або  не існує)  4.Досліджуємо знаки похідної при переході через критичні точки (методом інтервалів)  5.Знайти точки  та  і проміжки монотонності.  6.Обчислити значення функції∙ для точок  та .  **4.Розв’язування вправ**  1.Знайти точки екстремуму функції:  а)  Розв’язок.        ,        Отже    б)  Розв’язок.          ,        Отже    2. Знайти проміжки зростання функції  Розв’язок.        на проміжку  функція спадає  на проміжку  функція зростає  3.Знайти проміжки спадання функції  Розв’язок.        на проміжку  функція зростає  на проміжку  функція спадає  **Запитання для самоконтролю**   1. Зростання та спадання функції 2. Точки екстремуму. Необхідня та достатня умови екстремума 3. План знаходження інтервалів монотонності та точок екстремуму   **Лекція 45**  **Опуклість вгору та опуклість вниз. Асимптоти.**  **План** |
| 1. Опуклість вгору та опуклість вниз 2. Точки перегибу 3. Асимптоти 4. Приклади |
| 1. **Опуклість вгору та опуклість вниз**   Щоб дослідити більш детально особливості поведінки функції, введемо поняття угнутості і опуклості і точок перегину графіка функції. Розглянемо криві, зображені малюнках Будемо припускати, що лінія, задана рівнянням, має в точці (a; f (a)) дотичну, не паралельну осі ординат  Крива називається опуклою вгору в точці , якщо в деякому околі цієї точки  вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці . Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається опуклою вниз.  p1  Крива опукла вниз (відповідно увігнута) в деякому проміжку, якщо вона опукла (увігнута) у всіх точках цього проміжку. Проміжки опуклості і угнутості кривої можна знаходити за допомогою похідної.  *Теорема (ознака опуклості) Якщо друга похідна функції в даному проміжку додатня, то крива увігнута в цьому проміжку, а якщо від’ємна - опукла на цьому проміжку.*  Не проводячи суворого докази, обмежимося лише геометричними міркуваннями, що ілюструють справедливість цієї теореми. Якщо f''(x) = (f '(x))'> 0, то f (x) - зростаюча функція. Отже, провівши дотичні до графіка функції в точках М1, М2, ... , отримаємо, що тангенси кутів α1, α2, ... ростуть разом із зростанням х: tgα1 <tgα2 <..., тобто функція у '= tgα зростає, тому її похідна (у') '= у "додатня. А це означає, що графіком функції f (х) є увігнута крива. Аналогічно можна показати, що з умови f "(х) <0. В деякому проміжку слід опуклість кривої в цьому проміжку  Для знаходження інтервалів опуклості графіка функції використовують наступне правило:  1. *Знаходять другу похідну функції і точки, в яких вона дорівнює нулю або не існує.*  *2. Визначають інтервали, на які область визначення функції розбивається знайденими точками.*  *3. Встановлюють знаки другої похідної в кожному із зазначених інтервалів. Якщо f"(х)<0, то в розглянутому інтервалі крива опукла вгору; якщо f"(х)>0 – опукла вниз.*  Приклад. Дослідити на опуклість криву у = х2-х.  Розв’язок. 1. Знайдемо другу похідну: ; .  2. Так як друга похідна додатня для будь-якого х, то крива опукла вниз на всій області визначення R.  Приклад. Визначити проміжки опуклості кривої у = х3.  Розв’язок. 1. Знайдемо другу похідну: ;. Вона дорівнює нулю в точці х=0.  2. Точка х=0 розбиває область визначення функції на інтервали  та .  3. Умовою опуклості вгору кривої є f"(х)<0. Тоді 6х<0, , тобто крива опукла вгору на інтервалі , а опукла вниз на -  Приклад Знайти проміжки опуклості кривої.  Рішення. Знайдемо другу похідну: ,    при х1 =- 2 і х2 = 3.  Ці точки розбивають область визначення функції на інтервали, (-2, 3) і.  У проміжку(-2, 3)  крива увігнута, так як скрізь в цьому проміжку у "> 0; в проміжку  На проміжках- опукла, так як у" <0; в проміжку(-2, 3) - увігнута (у "> 0).  **2.Точки перегибу**  Як ми вже відзначали, іноді крива в одній своїй частині опукла, а в іншій увігнута; так, наприклад, частина синусоїди опукла вище осі Ох і увігнута нижче осі Ох, причому точка А служить кордоном між ними. Дотична, проведена до кривої в цій точці, є спільною для її опуклої й увігнутої частини; ця дотична в той же час перетинає криву в точці дотику, тому синусоїда в точці А ні опукла, ні увігнута. *Ця точка називається точкою перегину.  Точкою перегину кривої називається така точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від увігнутою.*  *Точка  називається точкою перегину даної кривої, якщо існує такий окіл точки  що при  у цьому околі опуклість кривої вниз спрямована в одну сторону, а при  - в іншу сторону.*  Для того щоб точка  була точкою перегину даної кривої необхідно, щоб друга похідна функції в цій точці або дорівнювала би нулю, або не існувала.  *Теорема (ознака існування точки перегибу). Якщо друга похідна f "(х) неперервна і змінює знак при переході через х = х0, то (x0; f (x0)) є точкою перегибу кривої у = f (x). Зауваження.* Так як f "(х) неперервна і в точці х = х0 змінює знак, то при х = х0 друга похідна дорівнює нулю. Точки, в яких друга похідна даної функції звертається в нуль, прийнято називати критичними точками II роду. Можливі випадки, коли друга похідна в точці перегину не існує, але ми їх не розглядаємо.  Доказ. Нехай, наприклад, f "(х0) = 0 в точці х0 і f" (х) знак змінює з плюса на мінус. Це означає, що зліва від х0 крива увігнута, а праворуч - опукла, тобто точка х0 відокремлює область угнутості від опуклості і є точкою перегину.  *З ознаки існування точки перегибу слідує правило її знаходження:*  *1. Знаходять другу похідну досліджуваної функції f(x).*  *2. Знаходять всі критичні точки II роду з області визначення функції.*  *3. Встановлюють знаки другої похідної функції при переході через критичні точки II роду. Зміна знака f"(х) вказує на наявність точки перегину.*  *4. Знаходять ординати точок перегину.*  Приклад. Дослідити на опуклість і точки перегину криву .  Розв’язок. 1. Визначаємо першу і другу похідні: ; .  2. З рівняння f”(х)=0 маємо 6(х—1)=0, тобто х=1 – критична точка II роду.  3. Якщо х<1, то f"(х)<0 і в проміжку  крива опукла вгору. Якщо х>1, то f"(х)>0 і в проміжку  крива опукла вниз, а х=1 – абсциса точки перегину.  4. При х=1 одержимо f(1)=3, тобто М(1, 3) – точка перегину.  Приклад. Дослідити на опуклість і точки перегину криву .  Розв’язок. 1. ; .  2. З рівняння 6х-12=0 знаходимо х=2.  3. Якщо х<2, то у"<0; отже, в інтервалі  крива опукла вгору. Якщо х>2, то у">0; значить, в інтервалі  крива опукла вниз.  Отже, при переході через х=2 друга похідна у"(х) змінює знак з мінуса на плюс. Отже, крива має точку перегину, абсциса якої дорівнює 2.  4. Підставляючи в рівняння кривої х=2, знайдемо ординату точки перегину: . Отже, (2;-12) – точка перегину.  Приклад. Знайти точки перегину кривої .  Розв’язок. 1. ;  .  2. , звідси , , , , .  3. Досліджуємо значення . Якщо , наприклад х=0, то ; якщо , наприклад х=2, то . Отже, при  маємо точку перегину.  Досліджуємо значення . якщо , наприклад х=-2, то ; якщо , наприклад х=0, то . Отже, при  також маємо точку перегину.  4. Знаходимо  ,  Отже,  та  – точки перегину.  3.**Асимптоти кривих**  Розглянемо малюнок  Мі бачимо, що графік функції наближається до прямої у=0, якщо х→±∞ та наближається до прямої х=2 , якщо у→±∞  Говорять, що функція має дві асимптоти- вертикальну та горизонтальну  *Озн: Асимптота- це пряма, до якої графік функції наближається, але николи її не перетинае*  Асимптоти бувають горизонтальні,вертикальні та похилі  **1.Вертикальні асимптоти**  Пряма  називається *вертикальною асимптотою*, якщо lim f(x)= ±∞ при х→а. При цьому точка а є точкою розриву 2 роду f(x)  Рівняння вертикальної асимптоти х=а  Приклад. Знайти асимптоти графіка функції .  Прямі  - вертикальні асимптоти, оскільки ,  **2.Горизонтальні асимптоти**  Графік функціі у=f(x) при х→±∞ *має горизонтальну асимптоту*, якщо lim f(x)= в при х→±∞..  Рівняння вертикальної асимптоти у=в  **3.Похилі асимптоти**  Під *похилою асимптотою* графіка функції  розуміють пряму, що володіє тією властивістю, що відстань від прямої до змінної точки на кривій наближається до нуля, якщо точка, рухаючись уздовж кривої, необмежено віддаляється  Рівняння похилої асимптоти має вигляд . Зокрема, якщо , асимптота є горизонтальною. Якщо похила асимптота існує, то  і знаходяться за формулами , .  Якщо хоча б одна з границь не існує, то похилих асимптот крива не має. Асимптоти можуть бути різними при х→+∞ та при х→-∞ |
| **Запитання для самоконтролю**   1. Опуклість вгору та опуклість вниз 2. Точки перегибу 3. Асимптоти |

**Лекція 46**

**Дослідження графіків функцій та їх побудова**

**План**

|  |
| --- |
| 1. Функції та їх властивості 2. План побудови графіка функції 3. Приклади     **1.Функції та їх властивості**  На початку лекції нагадаємо основні поняття та властивості функцій  Поняття функції є одним із основних математичних понять. Це поняття відбиває тісний зв'язок математики з різноманітними явищами та про­цесами, які зустрічаються у природі, техніці, економіці.  Поняття функції пов'язане зі встановленням залежності (зв'язку) між елементами двох множин, зокрема двох числових множин.  *Означення.* Нехай маємо множину Х дійсних чисел. Якщо кожному числу х Є *X* за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число у. то говорять, що на множині *X* задано **функцію.**  За цим означенням функцію задано кожного разу, коли виконуються такі умови:  задано множину всіх можливих значень *х.* Цю множину, яку по­ значаємо *Х* називають *областю визначення* або *областю існування функції',*  існує правило (закон), за яким для кожного дійсного числа *хє X* можна вказати цілком певне (одне) значення *у.* При цьому х називають *аргументом* або *незалежною змінною; у* називають *залежною змінною* або *функцією.*  **Область визначення функції *f*** — це множина тих значень, яких може на­бувати аргумент х. Вона позначається ***D*(f)**.  **Область значень функції f** — це множина, яка складається із всіх чисел *f*(х), де х належить області визначення. Її позначають **Е (f)**.  Нагадаємо, що  графіком функції y=f(х) *називається множина всіх точок координатної площини з координатами (x; f(x)), де перша координата* х *«пробігає» всю область визначення функцій, а друга координата — це відповідне значення функції* f *у точці* х.  Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.  *Функція* f(х) *називається* зростаючою па множині Р, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.*  Тобто для будь-яких двох значень ***x1*** і х2 з множини Р, якщо х2 > ***x1***., то *f(x2)>f(x1).*  *Функція* f(х) *називається* **спадною на множині *Р****, якщо більшому значенню* *аргументу з цієї множини відповідає* *менше значення функції.*  Тобто для будь-яких двох значень х1 і х2 з множини Р, якщо *х*2 > х1, то *f*(х2)<*f*(х1).  *Функція f називається* **парною**, *якщо для будь-якого* х *з її області визна­чення*  ***f(-x)=f (x)****.*  Якщо функція *f*(х) парна, то до її графіка разом з кожною точкою М з ко­ординатами (х; у)= (х; f(x)) входить також і точка М1 з координатами (-х; у)= (-х; *f*(-х)) = (-х;*f(* х)). Точки Мі М1 розміщені симетрично віднос­но осі Оу (рис. 10), тому і весь графік парної функції розміщений симет­рично відносно осі **О.**  *Функція* *f* *називається* **непарною**, *якщо для будь-якого* х *з її області визначення* ***f(-х) =-f(х).*** Якщо функція *f*(х) непарна, то до її графіка разом з кожною точкою М , з координатами (х; у)=(х; *f*(х)) входить також і точка М1 з координатами (-х; у)=(-х; f (-х)) = (-х;*f* (х)). Точки М і М1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 11), тому і весь графік непарної функції **розміщений симетрично відносно початку координат.**  Функція *y=f(x)* називається періодичною з періодом *Т≠0*, якщо для будь-якого *х* з області визначення функції *y=f(x)* виконується рівність *f(x+T)=f(x-T)=f(x).*  **2.План побудови графіка функції** |
| **Дослідження функції та побудова графіка**  Загально відомою є схема дослідження функції для побудови графіка:   * знайти область визначення функції та множину її значень; * дослідити функцію на парність та непарність, періодичність; * знайти точки перетину графіка функції з осями системи координат, точки розриву, проміжки знакосталості функції; * дослідити поводження функції біля точок розриву та на нескінченності, знайти якщо вони є, асимптоти графіка; * знайти нулі та точки розриву похідної, інтервали монотонності функції, точки екстремуму та екстремальні значення функції; * знайти нулі та точки розриву другої похідної, інтервали опуклості графіка функції, точки перегину та значення функції в цих точках; * для побудови графіка необхідно знайти достатню кількість контрольних точок, через які він проходить.   Зауважуємо, що на практиці не завжди є потреба досліджувати функцію за наведеною схемою і в такій саме послідовності.  Так, наприклад, множину значень деяких функцій можна встановити лише після знаходження екстремальних значень функції та її поводження біля точок розриву і на нескінченності.  Можна спочатку знайти нулі функції. Якщо вони розташовані не симетрично відносно нуля, то функція не може бути ні непарною, ні парною, ні періодичною. Такий же висновок можна зробити у випадку, коли функція має область визначення не симетричну відносно нуля, то, зрозуміло, що з такого факту ми не можемо робити висновок про парність або непарність. Проте, якщо нулі функції симетричні відносно нуля, але їх число скінчене, то вона не є періодичною.  Не може бути функція ні парною, ні непарною, ні періодичною, якщо нулі першої або другої похідних розміщені несиметрично відносно нуля.  Аналогічно можна зробити висновок і з несиметричного розміщення точок розриву.  Для складних функцій  можна керуватися такими простими твердженнями:   * *якщо функція  парна, то складна функція також парна;* * *якщо функція  і  непарні, то складна функція непарна;* * *якщо  непарна, а функція парна, то складна функція парна;* * *якщо функція  періодична, то і складна функція  періодична,*   причому її період може бути меншим за період функції , але не більшим; їх періоди збігаються, якщо функція *f* строго монотонна.  Зручно користуватися такими твердженнями:   * *сума скінченого числа парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією;* * *добуток парних функцій є парною функцією;* * *добуток непарних функцій є парною функцією, якщо число функцій-множників – парне число, і непарною, якщо число функцій-множників непарне;* * *добуток(частка) парної і непарної функції є функцією непарною.*   *3.Приклади*  Дослідимо функції та побудуємо їх графіки.  Приклад 1. Побудувати графік функції    Розв’язання.  Область визначення функції f :  Х=.  Функція парна. Тому її графік симетричний відносно осі ординат.  Функція не є періодичною. Це випливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.  Графік функції перетинає вісь ординат у точці (0;1). Нулі функції відсутні. Отже, графік функції не перетинає вісь абсцис.  Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо похідну    ;  х=0–критична точка.  Для  . Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках  вона спадає. Тоді точка х=0 є точкою локального максимуму. Знайдемо його значення  .  Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:    .  На проміжках  . Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку  , а тому графік функції опуклий вгору.  Точки перегину відсутні.  Оскільки , то пряма у=1 є горизонтальною асимптотою для графіка функції.  Дослідимо поведінку функції біля точок х=2, х=-2:  , .  Отже, в точці х=2 функція має розрив другого роду, а пряма х=2 є вертикальною асимптотою. Враховуючи парність функції, робимо висновки, що пряма х=-2 також є вертикальною асимптотою.  .  Приклад 2. Побудувати графік функції:    Розв’язання.  Область визначення функції f :  .  Функція не належить ні до парних, ні до непарних. Це безпосередньо випливає з того, що область її визначення несиметрична відносно нуля.  Період функції . Тому дослідження функції достатньо спочатку провести на проміжку . Крім того, враховуючи, що , робимо висновок про симетричність графіка відносно прямої  на проміжку . Тому можна обмежитися дослідженням функції на проміжку  Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки на проміжку . Для цього знайдемо її похідну  .  Для  . Тому функція на цьому проміжку спадає. Тоді на проміжку  вона зростає, а в точці має мінімум, який дорівнює 1.  Враховуючи періодичність функції, робимо висновок, що вона на проміжках і зростає на проміжках , . В точках  набуває мінімального значення, яке дорівнює 1.  Дослідимо функцію на опуклість на проміжку :  .  Звідси безпосередньо випливає, що для  . Отже, графік функції опуклий вниз. Тоді і на проміжку  він опуклий вниз. Таким чином, на проміжках  графік функції опуклий вниз.  Визначимо поведінку функції біля нуля справа і біля  зліва:    .  Отже, прямі х=0, х= – вертикальні асимптоти. Тоді і прямі х=, – вертикальні асимптоти.    **Запитання для самоперевірки** |

Функції та їх властивості

План побудови графіка функції

**Лекція 47**

**Первісна. Невизначений інтеграл.**

**План**

|  |
| --- |
| 1. Поняття первісної. Основна властивість первісної. 2. Невизначений інтеграл. 3. Правила знаходження первісних (правила інтегрування). 4. Таблиця первісних (невизначених інтегралів) |

**Поняття первісної. Основна властивість первісної.**

Раніше ми за заданою функцією знаходили її похідну і застосовували цю операцію диференціювання до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості і прискорення прямолінійного руху відомим законом зміни координати х(t) матеріальної точки:

Наприклад, якщо в початковий момент часу t= 0 швидкість тіла дорівнює нулю, тобто (0) = 0, то при вільному падінні тіло на момент часу t пройде шлях



Тоді швидкість і прискорення знаходять за допомогою диференціювання:



Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію f (х) за її заданою похідною f(х). Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату x(t), знаючи закон зміни швидкості (t), а також визначати швидкість (t), знаючи закон зміни прискорення a(t). Знаходження функції f’(х) за заданою похідною f’(х) називають операцією **інтегрування**.

Таким чином, операція інтегрування обернена до операції диференціювання. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною f'(х) знайти (відновити) функцію *f*(х) (латинське слово integratioозначає «відновлення»).

Наведемо означення понять, пов'язаних із операцією інтегрування.

*Функція* F *(х) називається первісною для функції* f *(х) на даному проміжку, якщо для будь-якого* х *із цього проміжку* F'(х) *= f(х).*

Наприклад, для функції f(х)=3х2 на інтервалі (-∞; +∞) первісною функція F(х) = х3, оскільки F' (х) = (х3)' =3х2.

Зазначимо, що функція х3+5 має ту саму похідну (х3 + 5)' =3х2. Отже, функція х3 + 5 також є первісною для функції 3х2 на множині **R**. Зрозуміло, що замість числа 5 можна підставити будь-яке інше число. Тому задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки до­зволяє основна властивість первісної.

*Якщо функція* F*(х) є первісною для функції* f*(х) на даному проміжку, а* С *— довільна стала, то функція* F*(х)+С також є первісною для функції* f*(х), при цьому будь-яка первісна для функції* f(х) *на даному проміжку може бути записана у вигляді* F*(х) + С, де* С *— довільна стала.*

Вираз F(х) + С називають загальним виглядом первісних для функції f (х).

☼ 1) За умовою функція F(х) є первісною для функції f(х) на деякому про  
міжку I. Отже, F' (х) =f (х) для будь-якого *х* з цього проміжку І. Тоді

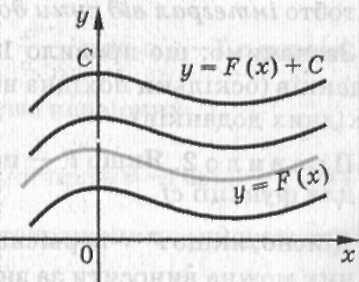
(F(х) + С)'= F'(х) + С' = *f*(х) + 0 =f (х), тобто F(х)+С теж є первісною для функції f(х).

☼ 2) Нехай функція F1(х) — інша первісна для функції *f*(х) на тому самому проміжку I, тобто (х) = *f* (х) для всіх х І. Тоді

(F1(х) - F(х))'=(х) - (х)= *f* (х) - *f* (х) =0.

За умовою сталості функції, якщо похідна функції F1(х) - F(х) дорівнює нулю на проміжку І, то ця функція набуває деякого сталого зна­чення С на цьому проміжку. Отже, для всіх х  І функція F1(х) - F(х) = С. Звідси F1(х) = F(х) + С, Таким чином, будь-яка первісна для функції *f* (х) на даному проміжку може бути записана у вигляді F(х) + С, де С — до­вільна стала.

Наприклад, оскільки для функції *f* (х) = 2х на інтервалі (-∞; +∞) одінією з первісних є функція F(х) = х2 (дійсно, F' (х) = (х2)' = 2х), то загальний вигляд усіх первісних функції *f* (х) = 2х можна записати так: х2 + С, де С — довільна стала.

Зауваження. Для стислості формулювань при знаходженні первісної функції f(x) проміжок, на якому задано функцію f(х), найчастіше не зазначають. При цьому маються на увазі проміжки найбільшої довжини. Геометрично основна властивість первісної означає, що графіки будь-яких первісних даної функції f(х) одержуються один з одного паралельним пе­ренесенням уздовж осі Оу (рис. 1). Дійсно, графік довільної первісної F(х)+С можна одержати з графіка пер- вісної F(х) паралельним перенесенням уздовж осі Оу на С одиниць.

**Невизначений інтеграл.** Нехай функція f(х) має на деякому проміжку  
первісну F(х). Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних функції f(х) на заданому проміжку задається формулою F(х)+ С, де С — довільна стала.

*Сукупність усіх первісних даної функції* f(х) *називається невизначе*ним інтегралом *і позначається символом*  f(x) dx, *тобто*

, *де* F(x) *— одна з первісних для функції* f(х), *а С — довільна стала.*

У наведеній рівності знак називається знаком інтеграла, функцію f(x) називають підінтегральною функцією, вираз f(х)dx — підінтегральним виразом, змінну х — змінною інтегрування і доданок С — сталою інтегрування.

Наприклад, як відмічалося вище, загальний вигляд первісних для функції f(х)=2х записується так: х2+С, отже 

**3. Правила знаходження первісних (правила інтегрування).**

Ці правила подібні до відповідних правил диференціювання.

*Правило 1. Якщо* F *— первісна для f, a* G *— первісна для g, то* F+G- *первісна для* f+g.

Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків. Дійсно, якщо F — первісна для f (у цьому короткому формулював мається на увазі, що функція F(x) — первісна для функції f (х)), то F'= f. Аналогічно, якщо G — первісна для g, то G'=g. Тоді за правилом обчислення похідної суми маємо

(F + G)' = F' + G' = f + g,

а це й означає, що F+G — первісна для f + g.

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:



тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.

Зазначимо, що правило 1 може бути поширене на будь-яку кількість доданків (оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює cумі похідних доданків).

*Правило 2. Якщо F — первісна для* fiс — *стала, то* cF *— первісна*

*для функції* cf.

Дійсно, якщо F — первісна для f, то F'=f. Враховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо (cF)'=cF=cf, а це й означає, що cF — первісна для cf.

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:



де с— стала, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

*Правило 3. Якщо* F - *первісна для* f, *a* k *і* Ь *—- сталі (причому* k≠0), *то  — первісна для функції *

■ Дійсно, якщо F — первісна для f, то F'= f. Враховуючи правило, обчислення похідної складеної функції, маємо

,

а це й означає, що  — первісна для функції f(kx+b). За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:



**3.Таблиця первісних (невизначених інтегралів).** Для обчислення первіс­них (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій, які наведено в таблиці.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8..

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

Щоб обґрунтувати правильність заповненя цього пункту таблиці, достатньо перевірити, що похідна від указаної первісної (без сталого доданку С) дорівнює заданій функції. Це буде означати, що розглянута функція дійсно є первісною для заданої функції, оскільки в запису всіх первісних у другій колонці присутній сталий доданок С, то за основною властивістю первісних можна зробити висновок, що це дійсно загальний вигляд усіх первісних заданої функції. Наведемо обґрунтування формул для знаходження первісних функцій хα та , а для інших функцій пропоную провести аналогічну перевірку самостійно.

● Для всіх х з області визначення функції хα при *а≠-1* похідна  Отже, функція  при *а≠ -1* є первісною для функції хα. Тоді за основною властивістю первісних загальний вигляд усіх первісних для функції хα при а≠ -1 буде +С ☼

**Запитання для самоперевірки**

Поняття первісної

Поняття неозначеного інтеграла

Формули безпосереднього інтегрування

**Лекція 48**

**Криволінійна трапеція. Визначений інтеграл**

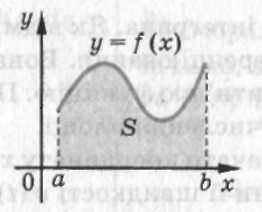
**План**

|  |
| --- |
| 1.Поняття криволінійної трапеції  2.Визначений інтеграл .Формула Ньютона-Лейбніца  3.Найпростіші властивості визначених інтегралів  4.Інтегрування частинами та заміна змінної для визначеного інтеграла |

**1.Поняття криволінійної трапеції**

Введемо поняття криволінійної трапеції

*Нехай на відрізку [а;b] осі Оx задано неперервну функцію f(x), яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції y=f(x), відрізком [а;b] осі Ох і прямими x=a і x=b називають* ***криволінійною трапецією***(рис. 4).

Відрізок [а;b] називають *основою цієї криволінійної трапеції*. З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної функції *f(x).*

Позначимо через S(x) площу криволінійної трапеції з основою Рис. 4 [а;x] (рис.5, а), де x — будь-яка точка відрізка [а;b]. При *x=a* відрізок [а;x] вироджується в точку, і тому S(a) = 0, при *x=b* маємо S(b) = S, де S — площа криволінійної трапеції з основою [а;b] (Рис. 4 ).

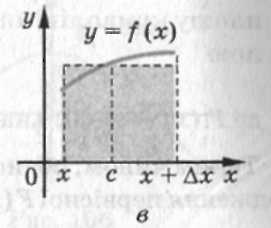
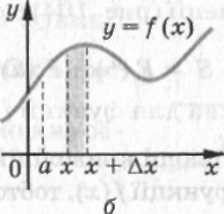
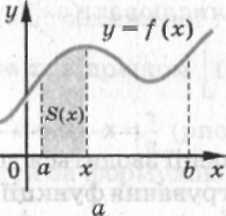


Рис. 5

Для того , щоб обчислити площу криволінійної трапеції розіб’ємо її на прямокутники з недостачею та на прямокутники з надміром з однією стороною Δх. Сума площ цих прямокутників приблизно буде дорівнювати площі криволінійної трапеції. Якщо Δх→0 . то площі цих прямокутників будуть наближатися до площі криволінійної трапеції.

Отже, площа криволінійного трапеції дорівнює спільній границі сум площ прямокутників.

Вводять теорему

***Теорема.*** *Якщо функція  монотонна на відрізку  і має первісну  на цьому відрізку, то існує границя інтегральних сум при  і ця границя дорівнює .*

**2.Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца**

**Означення.**  Визначеним інтегралом функції  на відрізку  називають границею інтегральної суми при  за умови, що ця границя існує і не залежить ні від розбиття відрізка  на частини, ні від вибору проміжних точок.

***Теорема.*** *Нехай функція  неперервна на відрізку . Тоді на  функції  відповідає цілком певне число , яке можна подати за допомогою кожної з таких форм:*

*1.  незалежно від вибору первісної;*

*2. ;*

*3.  - єдине число, яке міститься між усіма нижніми та верхніми сумами Дарбу(Сумами площ прямокутників з недостачею та з залишком).*

Таким чином, твердження 1-3 теореми можна розглядати як рівносильні формулювання означення визначеного інтеграла для будь-якої неперервної функції.

Історично визначений інтеграл було введено як позначення для границі інтегральних сум:

=. (1)

Саме у такий спосіб знаходили площі криволінійних трапецій, починаючи від Архімеда, і значення різних фізичних величин.

Пізніше, у ХVII ст. I. Ньютоном та незалежно від нього І. Лейбніцем було встановлено формулу

, (2)

де  - будь-яка первісна для функції  на відрізку .

Отже, складна задача відшукання границі інтегральної суми замінюється більш простою задачею визначення довільної первісної для функції  на відрізку  і відшукання її приросту на цьому відрізку. Отже,

. (3)

Записчитається: «Інтеграл від a до b еф від ікс де ікс». Числа a і b називаються *межами* *інтегрування*: a — нижньою межею, b — верх­ньою. Отже, за наведеним означенням

 (4)

Формулу (4) називають формулою ***Ньютона-Лейбніца***. Її називають основною формулою інтегрального числення, оскільки вона пов'язує між собою визначений та невизначений інтеграли від функції  на відрізку  .

Виконуючи обчислення визначеного інтеграла, зручно різницю *F (b) - F (a)* позначати так:, тобто . Користуючись цим позна­ченням, формулу Ньютона-Лейбніца можна записати у такому вигляді



Наприклад оскільки для функції  однією з первісних є , то 

В тому випадку, коли для функція f(x) на відрізку [а;b] існує визначений інтеграл , функцію f(x) називають *інтегрованою на відрізку [а;b].*

**3.Найпростіші властивості визначених інтегралів**

При формулюванні означення ви­значеного інтеграла ми вважали, що a<b. Зручно розширити поняття ви­значеного інтеграла, і для випадку a>b прийняти за означенням, що

 (5)

Для випадку a=b також за означенням будемо вважати, що

 (6)

Зазначимо, що формальне застосування формули Ньютона-Лейбніца до обчислення інтегралів у формулах (5) і (6) дає такий самий результат. Дійсно, якщо функція F(х) є первісною для функції f(х), то

. Також



За допомогою формули Ньютона-Лейбніца легко обґрунтовуються й інші властивості визначених інтегралів.

●Якщо *F (х)* є первісною для функції *f(x)*, то для функції *kf(x)* первісною буде функція *k F (x)*. Тоді

 Отже,

 ☼ (7)

●Якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x)*, а *G(х)* — первісною для функі *g(x)*, то для функції *f(x)+ g(x)* первісною буде функція *F(x)* + *G(х)* . Тоді



Отже,

 ☼ (8)

●Якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x)* і *c [а;b]*, то



Отже, якщо функція *f(x)* інтегрована на відрізку *[а;b]* і *c [а;b],* то

 ☼ (9)

**Розв'язання задач.**

**Приклад 1.** Обчисліть 

*Розв'язання* Заданий інтеграл обчислюється безпосереднім застосуванням формули Ньютона-Лейбніца 



*Відповідь:* 1.

**Приклад 2.** Обчисліть 

*Розв'язання* Використаємо формулу 



*Відповідь:* 

**Приклад 3.** Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца такі інтеграли:

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

Оскільки всі підінтегральні функції неперервні на відповідних відрізках, то, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, а також властивості 1, 2 маємо:

а) .

б) .

в) .

г) Оскільки функція  непарна, а відрізок [-1;1] симетричний відносно початку координат, то за властивістю 9 маємо

.

д) Оскільки функція  парна, а відрізок  симетричний відносно початку координат, то за властивістю 10 маємо

.

**4. Інтегрування частинами та заміна змінної для визначеного інтеграла**

Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, до властивостей визначеного інтеграла додамо ще такі два твердження.

*Формула інтегрування частинами.* Якщо функції  та  мають неперервні похідні на відрізку , то справджується рівність:

, (1)

або скорочено

. (2)

Доведення випливає з того, що функція  є первісною функції . Справді, за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

,

звідки за властивістю 1 п.8 остаточно дістанемо формулу (1).

*2. Формула зміни змінної.* Нехай функція  має неперервну похідну на відрізку , набуває значення з відрізка  і , , а функція  неперервна на інтервалі, який містить . Тоді справджується рівність

. (3)

Позначимо через  деяку первісну функції  на відрізку , яка існує внаслідок теореми п.7. За правилом похідної складної функції

.

Функція  є первісною для добутку  на відрізку . Зважаючи на це, за формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо такі рівності:

, (4)

. (5)

Оскільки , , то праві частини рівностей (4) і (5) є однаковими, що й доводить слушність формули (3)ю

**Приклади.** Обчислити інтеграли:

а) ; б) .

а) Поклавши , , маємо , , і за формулою (2) дістаємо

.

б) Використаємо підстановку . Тоді . Знайдемо нові межі інтегрування: , при ,  при . Тоді

.

**Запитання для самоперевірки**

* Поняття означеного інтеграла
* Поняття криволінійної трапеції
* Формула Ньютона-Лейбніца
* Найпростіші властивості визначених інтегралів

**Лекція 49**

**Площа криволінійної трапеції і фігури, яка обмежена лініями**

**План**

|  |
| --- |
| 1.Геометричний зміст визначеного інтеграла  2.Площа криволінійної трапеції  3.Площі фігур, які обмежені декількома лініями |

**1.Геометричний зміст визначеного інтеграла**

Як відмічалося раніше, інтегрування — це дія, обернена до диференціювання. Вона дозво­ляє за заданою похідною функції знайти (відновити) цю функцію. Покаже­мо, що ця операція тісно пов'язана з задачею обчислення площі.

Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату *х(t)* точ­ки при прямолінійному русі, знаючи закон зміни її швидкості *v*(*t*) (нага­даємо, що *v*(*t*) = *х*'(*t*)).

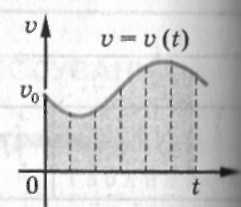
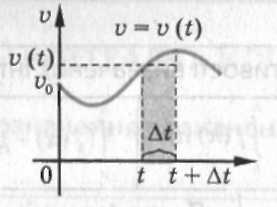
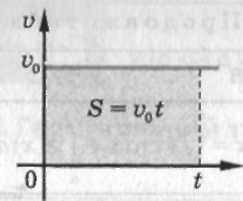


Рис. 1 Рис.2 Рис. 3

Розглянемо спочатку випадок, коли точка рухається з постійною швид­кістю *v* =*v0*. Графіком швидкості в системі координат (t; v) є пряма *v* =*v0,* паралельна до осі часу t (рис. 1). Якщо вважати, що в початковий момент часу t = 0 точка знаходилася в початку координат, то її шлях *s*, пройдений за час t, обчислюється за формулою *s=v0t*. Величина *v0t* дорівнює площі прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу під графіком швидкості.

Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вва­жати постійною тільки на маленькому відрізку часу *∆t*. Якщо швидкість *v* змінюється за законом v=v(t), то шлях, пройдений за відрізок часу [t;t+∆t], наближено виражається добутком *v(t)∆t*. А на графіку цей добу­ток дорівнює площі прямокутника із сторонами *∆t* і *v(t)* (рис. 2). Точне значення шляху за відрізок часу [t;t+∆t] дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виділеної на цьому рисунку. Тоді весь шлях за відрізок [0;t], може бути обчислений у результаті додавання площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях буде дорівнювати площі заштрихованої фігури під графіком швидкості (рис. 3).

● Покажемо, що S (х) є первісною для функції f(x), тобто що S' (x) = f(x). За означенням похідної нам потрібно довести, що  при .

Для спрощення міркувань розглянемо випадок  (випадок  розглядається аналогічно).

Оскільки , то геометрично ∆S — площа фігури, виділеної на рисунку 5, б.

Розглянемо тепер прямокутник з такою самою площею ∆S, однією із сторін якого є відрізок [x; х + ∆х] (рис. 5, в). Оскільки функція f(x) неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виділену на рисун­ку 5, в, або міститься в ній, і відповідно його площа буде більша або менша від площі ∆S). Висота прямокутника дорівнює f(с). За формулою площі прямокутника маємо . Тоді . (Ця формула буде правильною і при .)

Оскільки точка с лежить між х і х + ∆х, то с прямує до х, якщо . Враховуючи неперервність функції f(x), також одержуємо, що  при. Отже,  при . А це й означає, що S'(x)=f(x), тобто S(x) є первісною функції f(x).☼

Оскільки S(*x*) є первісною для функції f(x), то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна F(х) для функції f(x), при всіх відрізняється від S(х) на постійну *C*, тобто

*F(x)=S(x)+C* (1)

Щоб знайти С, підставимо *x=a*. Одержуємо F(a)=S(a)+C. Оскільки S (а) = 0, то С= F (а) і рівність (1) можна записати так:

*S(x) = F(x)-F(a).*  (2)

**2.Площа криволінійної трапеції**

Враховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює S(b), підстав­ляємо в формулу (2) x=b і одержуємо *S = S (b) = F (b) - F (a)*. Отже,

*площу криволінійної трапеції (рис. 4) можна обчислювати за формулою*

*S = F (b) - F (a). (3)*

*де F(х) — довільна первісна для функції f(x).*

Таким чином, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної F(х) для функції f(x), тобто до інтегрування функції f(x).

Ми вже знаємо. що

*Різницю F (b) - F (a) називають визначеним інтегралом функції f(x) на відрізку [a;b] і позначають так:*

* (4)*

З формул (3) і (4) одержуємо, що

*площу криволінійної трапеції,обмеженої графіком неперервної і не від'ємної на відрізку [а;b] функції y=f(x), відрізком, [а;b] осі Ox і прямими x=a і x=b (рис. 4), можна обчислювати за формулою*

** (5)

Зауваження.

У задачах з курсу алгебри і початків аналізу на обчис­лення площ як відповідь найчастіше наводиться числове значення площі. Оскільки на координатній площині, де зображається вказана фігура, зав­жди вказується одиниця виміру по осях, то в цьому випадку ми завжди маємо і одиницю виміру площі — квадрат із стороною 1.

Інколи, щоб підкреслити, що одержане число виражає саме площу, відповідь до остан­нього прикладу записують так: S =  (кв. од.) — тобто квадратних одиниць. Відзначимо, що так записуються тільки числові відповіді.

Якщо в резуль­таті обчислень площі ми одержали, наприклад, що S = 2а2, то ніяких по­значень про квадратні одиниці не записується, оскільки відрізок а був ви­міряний у якихось лінійних одиницях і тоді вираз *a2* вже містить інформа­цію про ті квадратні одиниці, у яких вимірюється площа в цьому випадку.

Наприклад, площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції y=cos x, відрізком  осі Oх і прямими х=0 і х= (рис. 6), можна обчислити за формулою 

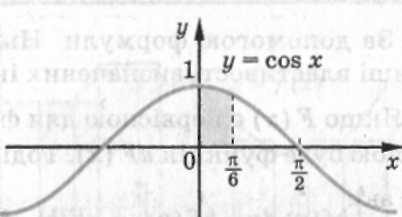


Рис. 6

(При обчисленні визначеного інтеграла враховано, що для функції f(x)=cos х однією з первісних є функція F (х) = sin х.)

**Приклад .** Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими x=1, x=8, віссю *Ох* і графіком функції 

*Розв'язання* Зображуючи ці лінії, бачимо, що задана фігура – криволінійна трапеція.

Тоді площа дорівнює



8

1

0

x

y



*Відповідь: * кв. од.

**Зауваження.**

* У випадку, коли на проміжку (;  функція  не змінює знака, то знак інтеграла  вказує на розміщення криволінійної трапеції відносно осі .
* Якщо інтеграл є число додатне, то криволінійна трапеція міститься над віссю , якщо ж інтеграл є число від'ємне, то криволінійна трапеція міститься під віссю .
* Таким чином, площа криволінійної трапеції дорівнює абсолютній величині визначеного інтеграла:

. (1)

* Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою , частково розміщена над віссю  і частково під віссю  (рис. 285), то площа фігури, яка обмежена кривою  і віссю  на відрізку  , дорівнює

. (2)

* Якщо  - непарна, то

.

* Якщо  - парна, то

.

**3.Площі фігур, які обмежені декількома лініями**

Обґрунтування площі криволінійної трапеції та приклади її застосування було наведено раніше.

З'ясуємо як можна обчислити площу фігури, зображену на малюнку 1.

*Ця фігура обмежена зверху графіком функції y=f2(x), а з низу графіком функції y=f1(x), а також вертикальними прямими x=a і x=b (a<b); функції f1(x) і f2(x) неперервні і невід'ємні на відрізку [a; b] і f2(x)≥ f1(x) для всіх х[a; b].*

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S1 і S2 криволінійних трапецій (S2 – площа криволінійної трапеції AA1B2B, а S1 – площа криволінійної трапеції AA1B1B). Але

Рис. 1

В

A

b

a

S

*y=f2(x)*

*y=f1(x)*

B1

B2

A1

A2

0

x

y

, .

Отже, 

Таким чином, площу заданої фігури можна обчислювати за формулою



Рис. 2

*y=f2(x)*

*y=f1(x)*

0

y

x

b

a

Рис. 3

x

a

b

0

*y=f2(x)+m*

*y=f1(x)+m*

y

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку *[a; b]* – достатньо виконання умов, що *функції* *f1(x) і f2(x) неперервні на відрізку [a; b] і f2(x)≥ f1(x)* для всіх *х[a; b]* (рис. 2).

Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилась над віссю Ох (рис. 3). Таке перетворення означає, що задані функції *y=f1(x)* і *y=f2(x)* ми замінили відповідно на функції *y=f1(x)+m* і  *y=f2(x)+m.* Площа фігури обмеженої графіками цих функцій та прямими *x=a* і *x=b*, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа 

**Наприклад,** площа зображена на малюнку 4, дорівнює



Рис. 4

y=cos x

*y=sin x*

π



-1

1

x

y



0

**Приклад** Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями і .

*Розв'язання* Зобразимо задані лінії і знайдемо абсциси точок їх перетину:







-1

1

0

x

y

x=0 або х=-1 (обидва корені задовольняють рівнянню ) Площа заданої фігури дорівнює



**Запитання для самоперевірки**

Поняття означеного інтеграла

Поняття криволінійної трапеції

Формула Ньютона-Лейбніца

Формула знаходження площи криволінійної трапеції

**Лекція 50**

**Площа бічної поверхні тіла обертання. Обчислення об'єму тіл, що утворюються обертанням плоских фігур.**

|  |
| --- |
| **План лекції**  1.Площа бічної поверхні тіла обертання.  2.Обчислення об'єму тіл, що утворюються обертанням плоских фігур.  3.Приклади розв'язання завдань |

**1.Площа бічної поверхні тіла обертання.**

Задачі обчислення площі бічної поверхні тіла обертання та обчислення об'єму тіла, яке утворене обертанням плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі знаходження площі криволінійної трапеції.

Нехай тіло утворено за до­помогою обертання криволінійної трапеції, обмеженої віссю *Ох,* прямими *х = а* і *х=b* та графіком диференціальної функції *у* = ƒ(*х)* 0 (мал. 1). Поставимо задачу про відшукання площі бічної поверхні цього тіла. Поз­начимо через *Р(х)* площу бічної поверхні такого самого тіла, але обмеже­ного справа змінною стінкою, яка перетинає вісь абсцис у точці х (мал. 1). Якщо приріст *dx* вибирати досить малим, то головною частиною при­росту ∆*Р(х)* буде площа стрічки завдовжки *2πу* і завширшки *dl* (мал. 2). Тому



*dP(x) = 2πydl,*

*а отже,*

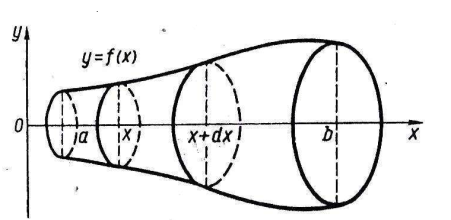
*b*

*Р = Р(b)= ∫2πydl,*

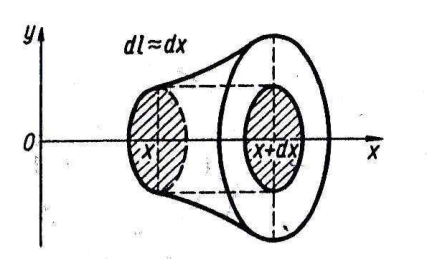
*а*або остаточно

*b*

*Р = 2π ∫y√1+(y')²dx.*  *а*



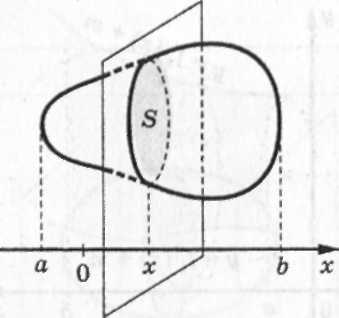
(мал. 1). (мал. 2).

****

**2.Обчислення об'єму тіл, що утворюються обертанням плоских фігур.**

Нехай задано тіло об'ємом *V*, причому є така пряма (вісь *Ох* на рис. 1), що яку б не взяли площину, перпендикулярну до цієї прямої, нам відома площа в пе­рерізу тіла цією площиною. Але площина, перпендикулярна до осі Ох, перетинає її в деякій точці х. Отже, кож­ному числу х (з відрізка [а; b] (рис. 1) поставлено у відповідність єдине число S(х) — площа перерізу тіла цією площиною. Тим самим на відрізку [а; b] дано функцію S(х). Якщо функція S неперервна на відрізку [а; b], то справджується формула

Рис. 1



 (1)

Повне доведення цієї формули наведено в курсах математичного аналізу, а ми зупинимося на наочних міркуваннях, що приводять до цієї формули.

● Поділимо відрізок [а; b] на п відрізків однакової довжини точками х0 = а < х1 < х2 < ... < хn-1 < хп = b і припустимо, що



Через кожну точку хк проведемо площину *αk*, перпендикулярну до осі Ох. Ці площини розрізають дане тіло на шари (рис. 2, а). Об'єм шару між площинами ак-*1* і ак (рис. 2, б) при достатньо великих п наближе­но дорівнює площі *S(xk-1)* перерізу, помноженій на «товщину шару» х, і тому



Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які роз­різане тіло, тобто чим більше п.

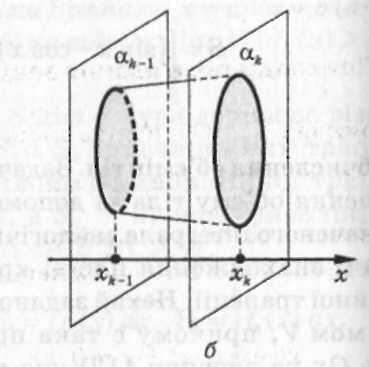
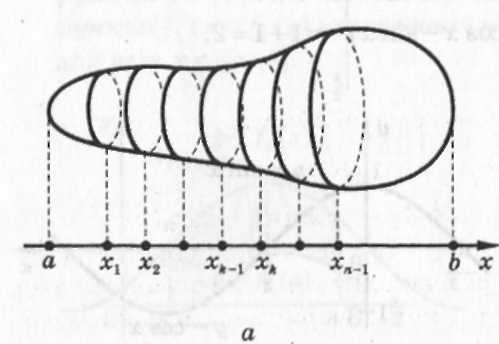


Рис. 2

Рис. 2



Тому Vn V, якщо п∞. За означенням визначеного інтеграла через

інтегральні суми одержуємо, що , якщо поо. Отже,

 (2)

Використаємо одержаний результат для обґрунтування формули об'єму тіл обертання.

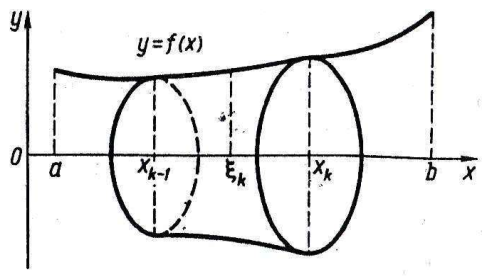
●Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок [а; b] осі Ох і обме­жена зверху графіком функції у =f(х), яка невід'ємна і неперервна на відрізку [а; b]. Внаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ох утворюється тіло (рис. 2, а), об'єм якого можна знайти за фор­мулою

 (3)

Дійсно, кожна площина, яка перпендикулярна до осі Ох і перетинає відрізок [а; b] цієї осі в точці х, дає в перерізі з тілом круг радіуса f(х) і площею S(х)=πf2(x) (рис. 2, б). Звідси за формулою (2) одержуємо формулу (3).

Скорис­таємося другою схемою відшукання визначеного інтеграла. Візьмемо деяке Т-розбиття відрізка [а; Ь] і до­вільний вибір проміжних точок Ек . Розглянемо прямокутник з основою ∆хк *= хк - хк\_1* і висотою ƒ(ζк ) ( мал. 3). Якщо цей прямокутник обер­тати навколо осі абсцис, то утвориться циліндр, об'єм якого ∆ Vк = πƒ² (ζк)( хк - хк-1 ).   
 n

Сума Vn = ∑πƒ²( ζк) ∆хк  
 *к=1*

 наближено визначає шуканий об'єм тіла обертання. Точне значення об'єму дістаємо як результат граничного переходу

n

V = π Iim ∑ƒ²( ζк) ∆хк.  
 n→*∞ к=1*

(мал.3)

Якщо при n→*∞*  найбільша довжина частинних відрізків [хк; хк-1] прямує до нуля, то за означенням визначеного інтеграла маємо

n

Iim ∑ƒ²( ζк) ∆хк = ∫ ƒ²(x)dx.  
 n→*∞ к=1*

Тому остаточно дістанемо

*b*

V = π ∫ƒ2 (x)dx.

# *а*

3.Приклади розв'язання завдань

Знайдіть об’єм тіла, яке утворене обертанням криволінійної трапеції







Знайдіть об’єм тіла, яке утворене обертанням криволінійної трапеції

*у=cos2х, х=0, х=π\6, у=0*



Запитання для самоконтролю

1.Площа бічної поверхні тіла обертання.

2.Обчислення об'єму тіл, що утворюються обертанням плоских фігур.